REVISTA CIENCIAS DE LA INGENIERÍA Y APLICADAS

ISSN: 2602-8255
Volumen 5, número 2, diciembre de 2021

Un modelo de optimización convexo para minimizar las pérdidas de energía en los sistemas de distribución

A convex optimization model for energy losses minimization in distribution systems.

Carlos Quinatoa Caiza[1] Jimmy Xavier Toaza[2] Marco Anibal León[3] Carlos Pacheco Mena[4] Rommel Suárez Vinueza[5]

RESUMEN

La integración de las energías renovables en la red de distribución ha cambiado el paradigma de operación de la red eléctrica de distribución convencional, surgiendo así el concepto de redes inteligentes (RI), donde se gestiona de forma coordinada las cargas y los grupos de generación distribuida (GD) con el fin de mantener el sistema eléctrico de distribución confiable, seguro y con una operación óptima. Debido a esto se necesita tener modelos matemáticos de optimización convexa, que garantice la unicidad y convergencia de las soluciones (óptimo global), por lo que se realizó un modelo convexo de programación semidefinida (SD), que por sus propiedades matemáticas intrínsecas ayudaron a obtener un modelo relajado que garantiza la solución del algoritmo. Para contrarrestar el modelo se utilizó el test feeder 37 nodos de la IEEE, logrando así obtener una solución en las pérdidas totales de la red de distribución con un error de 3% respecto a los métodos convencionales, como programación no lineal (PNL) y programación cuadrática..

Palabras claves: Optimización convexa, unicidad, semidefinida, eigenvalor, eigenvector, traza, pérdidas eléctricas.

Recibido 2 de septiembre de 2021; revisión aceptada 6 de octubre de 2021

[1] Universidad Técnica de Cotopaxi, Latacunga, Cotopaxi, Ecuador, carlos.quinatoa4@utc.edu.ec
[2] Universidad Técnica de Cotopaxi, Latacunga, Cotopaxi, Ecuador, jimmy.toaza@utc.edu.ec
[3] Universidad Técnica de Cotopaxi, Latacunga, Cotopaxi, Ecuador, marco.leon@utc.edu.ec
[4] Universidad Técnica de Cotopaxi, Latacunga, Cotopaxi, Ecuador, carlos.pacheco2902@utc.edu.ec
[5] Universidad Técnica de Cotopaxi, Latacunga, Cotopaxi, Ecuador, rommel.suarez@utc.edu.ec

ISSN: 2602-8255
Volumen 5, número 2, diciembre de 2021

ABSTRACT:

The integration of renewable energies in the distribution network has changed the paradigm of operation of the conventional electricity distribution network, where appear a new concept smart grid, here the loads and distributed generation (DG) groups are managed in coordinated manner, which aim is to keep the electrical distribution system reliable, safe and with optimal operation, due to this it is necessary to have mathematical models of convex optimization, which guarantees the uniqueness and convergence of solutions (optimal global), for which a convex semi-defined programming (SD) model was made, which due to its intrinsic mathematical properties helped to obtain a relaxed model that guarantees the solution of the algorithm. To counteract the model, the IEEE 37 nodes test feeder was used, thus obtaining a solution with an error of 10^-4 which was compared using GAMS and with other authors of the scientific literature, where they propose non-linear mathematical methods for your solution, such as non-linear programming (NLP) and quadratic programming.

Key words: Convex optimization, uniqueness, semidefinite, eigenvalue, eigenvector, trace, electrical losses.

1. INTRODUCCIÓN

Los sistemas eléctricos de distribución tradicionales están cambiando de paradigma, debido a que existe un incremento de generación distribuida que se conectan a la red, esto ha generado problemas de operación, y confiabilidad porque las redes actuales no están diseñadas para la integración de dichos escenarios tales como: paneles fotovoltaicos, energía eólica, pequeñas centrales hidroeléctricas, vehículos eléctricos, etc [1]. Por consiguiente, muchos investigadores han desarrollado, arquitecturas, métodos, técnicas, así como modelos matemáticos para dar solución a dicho problema, surgiendo así el concepto de micro redes, que son sistemas que gestionan y operan en forma autónoma o no autónoma, un conjunto de generadores y cargas, no obstante, los conjuntos de micro redes forman un concepto denominado redes inteligentes o Smart Grid. Por lo tanto, se debe buscar nuevos métodos de solución para el análisis y operación de dichas redes ya que los métodos actuales tales como: el newton raphson, gaus seidel, barrido iterativos o flujo óptimo de potencia (OPF) no garantizan convergencia ni el óptimo global debido a que las ecuaciones de flujo potencia es no afín y no convexo [2]. Por tal motivo, es necesario analizar las características del modelo matemático de forma que se puedan encontrar simetrías, linealidades y posibilidades de paralelización. Un modelo convexo es deseable ya

ISSN: 2602-8255
Volumen 5, número 2, diciembre de 2021

que estos garantizan unicidad de las soluciones y convergencia polinomial. Esto se debe a aspectos intrínsecos del modelo y no a la forma en que son solucionados computacionalmente. Aunque no todos los problemas reales son convexos, es posible reformular los modelos mediante técnicas de relajación o bien mediante el cambio a un espacio diferente (por ejemplo, a un cono semidefinido). Este tipo de modelamiento tiene consecuencias teóricas, pero también prácticas en la implementación final de los algoritmos de solución.

El flujo de potencia a ser no lineal y no convexo varios autores en la literatura científica proponen métodos aproximados. Un modelo convexo [3], es utilizado para planificar y operar baterías y ultra capacitores con alta penetración de fuentes fotovoltaicos en redes de distribución en ventanas de tiempo de un minuto donde utilizaron una programación de cono de segundo orden (SOCP) para relajar el problema no lineal que presenta el flujo de potencia demostrando la convergencia y rapidez del algoritmo, también en [4] presenta una condición suficiente de relajación convexa en redes de distribución demostrando propiedades y simétricas matemáticas. En [5] presentan una relajación convexa semidefinida, para el flujo de potencia óptimo en redes eléctricas altamente mallado. Steve Low [6] presenta un enfoque de optimización convexa para entender las propiedades y estructuras del flujo óptimo de potencia. En [7] presenta una optimización convexa relajada para minimizar pérdidas a partir de transformadores con cambiadores de tap´s bajo carga carga. En [8] abarcan el problema de integración de generación distribuida en la red de distribución con modelos matemáticos de optimización convexa que ayudan a la rápida convergencia, nuevamente Stev Low [9] presenta un modelo matemático de programación cuadrática con restricciones cuadráticas aplicadas al flujo óptimo de potencia enfocando en la propiedades matemáticas y ventajas computacionales. En [10] presenta un ejemplo ilustrativo sobre la relajación convexa del flujo óptimo de potencia en sistema de potencia usando programación semidefinida. Sin embargo, la optimización convexa se ha utilizado para presentar la formalidad en las estructuras y propiedades matemáticas aplicadas al flujo óptimo de potencia en redes malladas de media y alto voltaje. Todavía no se han presentado la programación semidefinida a redes de distribución radial, donde se explique las propiedades y estructuras matemáticas. Por lo tanto, es necesario realizar una investigación de optimización convexa tal como programación semidefinida aplicado al flujo óptimo de potencia en sistemas de distribución con el fin de garantizar unicidad en la solución.

ISSN: 2602-8255
Volumen 5, número 2, diciembre de 2021

El algoritmo propuesto se ha implementado en cvx-matlab en el test feeder de la IEEE de 37 nodos, el cual presento convergencia y unicidad de la solución con errores menos de 3% con respecto a los métodos convencionales, sin embargo este algoritmo de programación SD pasa de un espacio en $\mathbb{R}^n$ a otro en S^n que son espacio de las matrices, donde deben cumplir ciertas características matemáticas como por ejemplo que la matriz de las variables de estado sea necesariamente semidefinida positiva, n es el número de nodos, eso hace que cuando crezca el número de nodos en el sistema de distribución se demore más en tiempo computacional pero siempre garantiza el óptimo global.

El resto de este documento está organizado de la siguiente manera. En primer lugar, se presentan la modelación del flujo óptimo de potencia no lineal, donde se describe paso a paso la no linealidad que presenta el problema. Posteriormente se explican las propiedades matemáticas de la programación semidefinida para luego ser aplicada y relajada el problema original. Finalmente, se presenta resultados y conclusiones de la implementación del algoritmo propuesto.

2. MÉTODOLOGÍA

Se presenta el modelo de flujo óptimo de potencia en coordenadas rectangulares aplicado a redes de distribución que es no convexo de la siguiente manera:

Modelo OPF-NL

Considerando la red de distribución tipo radial, donde $N = 1, 2, .., k$ representa el conjunto de todos los nodos, G representa el conjunto de todos los generadores conectado a los nodos y L representa el conjunto de todas las líneas. Sea $P_{Dk} + jQ_{Dk}$ que representa la potencia activa y reactiva de la carga en cada nodo donde $k \in N$. Sea $V_k = V_k + jU_k$ el voltaje en cada nodo en forma de coordenadas rectangulares donde $k \in N$. Sea $P_{Gk} + jQ_{Gk}$ representar la potencia activa y reactiva en los nodos $k \in G$. Sea S_{km} representar el flujo potencia de las líneas $(k,m) \in L$.
Se tiene el siguiente modelo no lineal al cual denominaremos como:

A) Modelo OPF-NL. Definimos un modelo no lineal de la siguiente manera:

$$\min = (2\sum_{k=1}^{N} G_{k0}.V_k.V_0) + (\sum_{K=1}^{N}\sum_{m=1}^{N} G_{km}.V_k.V_m) + (\sum_{K=1}^{N}\sum_{m=1}^{N} G_{km}.U_k.U_m) \quad (1)$$

ISSN: 2602-8255
Volumen 5, número 2, diciembre de 2021

Sujeto a:

$$P_{Gk} - P_{Dk} = V_k \sum_{m=1}^{N} (G_{mk}.V_m - B_{mk}U_m) + U_k \sum_{m=1}^{N} (B_{mk}.V_m - G_{mk}U_m) \tag{2}$$

$$Q_{Gk} - Q_{Dk} = V_k \sum_{m=1}^{N} (-B_{mk}.V_m - G_{mk}U_m) + U_k \sum_{m=1}^{N} (G_{mk}.V_m - B_{mk}U_m) \tag{3}$$

$$P_{Gk}^{\min} \leq P_{Gk} \leq P_{Gk}^{\max} \tag{4}$$

$$Q_{Gk}^{\min} \leq Q_{Gk} \leq Q_{Gk}^{\max} \tag{5}$$

$$(V_k^{\min})^2 \leq V_k^2 + U_k^2 \leq (V_k^{\max})^2 \tag{6}$$

$$|S_{km}| \leq S_{km}^{\max}$$

(7)

En este modelo la función objetivo (1) es convexa por ser una función cuadrática, donde se minimiza las pérdidas totales de la red. Las restricciones (2) y (3) corresponden al balance de potencia presentando la no linealidad y no convexidad; se debe tener en cuenta que en un problema de optimización convexa, requieren que las restricciones formen un conjunto afín $Ax = b$. Las restricciones (4) y (5) son los límites técnicos de generación de potencia activa y reactiva. La restricción (6) corresponde al límite de los voltajes en las barras y la restricción (7) corresponde al límite térmico de las redes eléctricas.

Propiedades Matemáticas

La optimización convexa es un subcampo de la optimización que estudia problemas de minimizar las funciones sobre los conjuntos convexos. La convexidad hace que la optimización sea más fácil que en el caso general, ya que el mínimo local es también un mínimo global y las condiciones de primer orden son suficientes para el problema.

Definición 1 (Conjunto convexo). Se dice que un conjunto convexo Ω de $\mathbb{R}^n$ es convexo si para cualquier par de puntos $x, y \in \Omega$ existe un z el cual pertenece al conjunto $(z \in \Omega)$ dado por:

$$z = \lambda x + (1-\lambda) y \in \Omega \tag{8}$$

Para todo $\lambda \in [0,1]$

Un ejemplo simple de conjunto convexo lo genera el espacio a fin definido como:

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b\} \tag{9}$$

ISSN: 2602-8255
Volumen 5, número 2, diciembre de 2021

Donde A es una matriz en S^n y b es un vector columna.

Lema 1 (Intersección de conjuntos convexos). La intersección de conjuntos convexos genera un nuevo conjunto convexo es decir si: Ω_1 y Ω_2 son conjuntos convexos, entonces $\Omega_1 \cap \Omega_2$ son convexos.

Definición 2 (Cono convexo). Un cono C no vacío es un cono si $x \in C$ implica que $\alpha x \in C$ para cualquier escalar $\alpha \geq 0$. Si además C es convexo se dice que es un cono convexo.

Definición 3 (Matriz semidefinida). Una matriz cuadrada $M \in \mathrm{S}^n$ es semidefinida positiva, que es representada por $M \succ 0$ si para cualquier vector $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$ se tiene que $x^T M x \geq 0$

Lema 2 (Cono semidefinido). Una restricción de la forma $X \succ 0$ forma un conjunto convexo (cono semidefinido) en donde $\succ$ representa el suborden de Lower.

Definición 3 (Función convexa). Sea $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ donde Ω es un conjunto no vacío de $\mathbb{R}^n$. La función f se dice que es convexa en Ω si para cualquier par de puntos x, y, y cualquier escalar λ que cumpla $0 \leq \lambda \leq 1$, se tiene:

$$f(\lambda x + (1-\lambda) y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) \tag{10}$$

Definición 4 (Problema de optimización convexa). El problema es de optimización convexa si la función objetivo es convexa y las restricciones genera un conjunto convexo.

Notar que esta condición se puede evaluar fácilmente usando el Lema 1, si las restricciones de igualdad generan espacios afines y las restricciones de desigualdad conjuntos convexos.

Definición 5 (Optimo global y local). Un punto $\tilde{x}$ es un óptimo local asociado al problema de optimización min $f(x), x \in \Omega$, si existe un conjunto abierto H en donde contiene a $\tilde{x}$ tal que $f(x) \geq f(\tilde{x})$, $\forall x \in H$. Si $\Omega \supseteq H$ entonces es el óptimo global.

La formulación OPF –NL es un problema no convexo debido al espacio no afín que se presenta en la restricción de balance de potencia y por lo tanto se clasifica como un problema NP- Hard que es difícil de resolver y encontrar el óptimo global. Usando las propiedades matemáticas se puede expresar el problema no lineal como una función lineal de la matriz cuadrática xx^T. Esto implica que si la matriz xx^T es remplazada por una nueva variable $W \in \mathrm{S}^n$, entonces las restricciones (2) y (3) son afines. Debido a que W viene xx^T se debe agregar dos restricciones al modelo y están son: a) $W \succ 0$ que necesariamente debe ser semidefinida y b) rango(W) = 1 donde está es la única restricción que es no convexa.

B) Proposición 1 (Modelo OPF -NLSD). Definimos un modelo de programación semidefinida no lineal de la siguiente manera:

$$\min = (2\sum_{k=1}^{N} G_{k0}.W_{ko}) + (\sum_{K=1}^{N}\sum_{m=1}^{N} G_{km}.W_{km}) + (\sum_{k=1}^{N}\sum_{m=1}^{N} G_{km}.W_{N+m,N+k}) \qquad (11)$$

$$P_{Gk} - P_{Dk} = V_k \sum_{m=1}^{N} (G_{mk}.W_{m,k} - B_{mk} W_{N+m,k}) + U_k \sum_{m=1}^{N} (B_{mk}.W_{m,N+k} - G_{mk} W_{N+m,N+k}) \qquad (12)$$

$$Q_{Gk} - Q_{Dk} = V_k \sum_{m=1}^{N} (G_{mk}.W_{m,k} - B_{mk} W_{N+m,k}) + U_k \sum_{m=1}^{N} (B_{mk}.W_{m,N+k} - G_{mk} W_{N+m,N+k}) \qquad (13)$$

$$P_{Gk}^{\min} \le P_{Gk} \le P_{Gk}^{\max} \qquad (14)$$

$$Q_{Gk}^{\min} \le Q_{Gk} \le Q_{Gk}^{\max} \qquad (15)$$

$$(V_k^{\min})^2 \le W_{kk} \le (V_k^{\max})^2 \qquad (16)$$

$$(W_{kk} - W_{km}) Y_{km}^{*} \le S_{km}^{\max} \qquad (17)$$

$$W \succ 0 \qquad (18)$$

$$Rango(W) = 1 \qquad (19)$$

Relajación semidefinida

El modelo OPF –NLSD es un problema no lineal semidefinida debido a la restricción 19, se pude generar un problema semidefinida lineal al relajar el rango de la siguiente manera.

C) Proposición 2 (Modelo OPF-SD). Definimos un modelo de programación semidefinida lineal a las siguientes ecuaciones:

$$\min = (2\sum_{k=1}^{N} G_{k0}.W_{ko}) + (\sum_{K=1}^{N}\sum_{m=1}^{N} G_{km}.W_{km}) + (\sum_{k=1}^{N}\sum_{m=1}^{N} G_{km}.W_{N+m,N+k}) \qquad (20)$$

$$P_{Gk} - P_{Dk} = V_k \sum_{m=1}^{N} (G_{mk}.W_{m,k} - B_{mk} W_{N+m,k}) + U_k \sum_{m=1}^{N} (B_{mk}.W_{m,N+k} - G_{mk} W_{N+m,N+k}) \qquad (21)$$

$$Q_{Gk} - Q_{Dk} = V_k \sum_{m=1}^{N} (G_{mk}.W_{m,k} - B_{mk} W_{N+m,k}) + U_k \sum_{m=1}^{N} (B_{mk}.W_{m,N+k} - G_{mk} W_{N+m,N+k}) \qquad (22)$$

$$P_{Gk}^{\min} \le P_{Gk} \le P_{Gk}^{\max} \qquad (23)$$

$$Q_{Gk}^{\min} \le Q_{Gk} \le Q_{Gk}^{\max} \qquad (24)$$

$$(V_k^{\min})^2 \le W_{kk} \le (V_k^{\max})^2 \qquad (25)$$

ISSN: 2602-8255
Volumen 5, número 2, diciembre de 2021

$$(W_{kk} - W_{km})Y_{km}^{*} \leq S_{km}^{\max} \tag{26}$$

$$W \succ 0 \tag{27}$$

El Modelo OPF-SD es un problema relajado donde se presenta las siguientes definiciones:

Definición 6 (Modelo OPF-SD). El modelo OPF-NSD genera un modelo convexo relajado denominado OPF-SD al relajar la restricción de rango de la matriz W.

Nota 1. El problema OPF-SD es una aproximación del modelo OPF-NLSD, sin embargo, si la solución al problema de optimización resulta ser de rango 1, entonces el resultado constituye el óptimo global del problema original.

Preposición 2 (Variables originales). Se puede tener una aproximación de los resultados del modelo OPF-SD mediante la factorización de W. Donde $V = (x^T\Phi) = (\sqrt{\lambda}\Phi)$.

Nota 2. Como W es simétrica, los espacios propios que corresponden a valores propios distintos son mutuamente ortogonales, y así uno puede elegir una base ortonormal de vectores propios. Como consecuencia, la matriz W es diagonalizable y siempre hay una descomposición.

Demostración 1. Sea $W \in S^n$, un elemento $\Phi \in \mathbb{R}^n$ se denomina eigenvector de W si existe un escalar $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que: $W\Phi = \lambda\Phi$.

En este caso $\lambda \in \mathbb{R}$ se denomina el eigenvalor de la matriz W asociado al eigenvector por la derecha Φ, y al eigenvector por la izquierda γ.

$$W\gamma = \lambda\gamma \tag{28}$$

Definiendo que $\gamma^T = \Phi$, y pre-multiplicando Φ^T se tiene:

$$\Phi^T W \Phi = \Phi^T \lambda \Phi \tag{29}$$

Recordando que $W = xx^T$

$$\Phi^T xx^T \Phi = \Phi^T \lambda \Phi \tag{30}$$

$$(x^T\Phi)^T (x^T\Phi) = \Phi^T \lambda \Phi \tag{31}$$

Donde $\lambda = (\sqrt{\lambda})(\sqrt{\lambda})$

$$(x^T\Phi)^T (x^T\Phi) = (\Phi^T \sqrt{\lambda})(\sqrt{\lambda}\Phi) \tag{32}$$

Y por último separando

$$(x^T\Phi)^T = (\Phi^T \sqrt{\lambda}) \tag{33}$$

$$(x^T\Phi) = (\sqrt{\lambda}\Phi) \tag{34}$$

ISSN: 2602-8255
Volumen 5, número 2, diciembre de 2021

Esta última ecuación corresponde a la variable original, que para el caso de OPF-SD seria los voltajes en cada nodo.

3. RESULTADOS

El sistema de distribución de la IEEE 37 nodos [11] fue usado para contrarrestar el modelo OPF-SD, donde se realizó un modelo equivalente balanceado con una base 1 MVA, este resultado fue comparado con el modelo OPF-NL realizado en Gams [12] y con el modelo de flujo óptimo cuadrático [13]. En este sistema se incluyeron 3 generadores distribuidos en forma aleatoria como se muestra en figura.

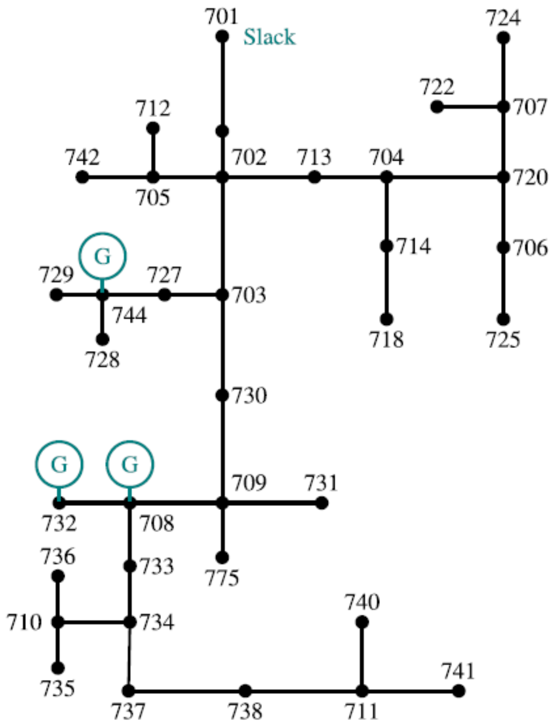

Figura 1: Sistema IEEE 37 nodos modificado

En la implementación se consideró la capacidad de los generadores de $P_{\max} = Q_{\max} = 0.9$ y el resultado se presenta en siguiente tabla.

Tabla 1: Resultado comparativo $P_{\max} = Q_{\max} = 0.9$

Variable	OPF-Q [13]	OPF-NL (GAMS)	OPF-SD
S_{708}	0.858+j0.415	0.854+j0.412	0.858+j0.415
S_{732}	0.042+j0.021	0.040+j0.022	0.042+j0.021

ISSN: 2602-8255
Volumen 5, número 2, diciembre de 2021

S_{744}	0.388+j0.191	0.379+j0.195	0.388+j0.191
P_L	0.00890	0.00876	0.00890

El modelo OPF-SD presenta los mismos resultados con el modelo cuadrático OPF-Q, existe una pequeña diferencia entre los resultados OPF-SD y OPF-NL que es aproximadamente menos del 3%, en este sistema de prueba IEEE 37 nodos las pérdidas totales sin incluir generación distribuida es de P_L= 0.030.

Para el segundo escenario se considera una capacidad de $P_{\max} = Q_{\max} = 0.7$ en los generadores presentando los siguientes resultados.

Tabla 1: Resultado comparativo $P_{\max} = Q_{\max} = 0.7$

Variable	OPF-Q [13]	OPF-NL (GAMS)	OPF-SD
S_{708}	0.700+j0.415	0.700+j0.400	0.700+j0.415
S_{732}	0.154+j0.021	0.147+j0.028	0.154+j0.021
S_{744}	0.413+j0.191	0.409+j0.190	0.413+j0.191
P_L	0.00896	0.0088	0.008901

Debido a que se activa la restricción de desigualdad del generador ubicado en la barra 708, presenta un pequeño cambio sin embargo los resultados son satisfactorios presentando un error de aproximadamente 3%.

4. CONCLUSIONES

El modelo OPF-SD fue propuesto para minimizar las pérdidas en sistema de distribución tipo radial. Este modelo es una transformación en $\mathbb{R}^n$ a S^n es decir se pasa del espacio de los vectores al espacio de las matrices que es un espacio más grande, esto no siempre resulta aplicable en la práctica porque se está incrementado las variables de estado del sistema, sin embargo garantiza unicidad en las soluciones y por lo tanto un óptimo global, llegando a obtener un error menos del 3% en los resultado comparado con el método OPF-NL clásico que fue desarrollado con GAMS y la aproximación cuadrática presentada en la literatura.

ISSN: 2602-8255
Volumen 5, número 2, diciembre de 2021

5. BIBLIOGRÁFIA

[1] F. Li et al., "Smart transmission grid: Vision and framework," IEEE Trans. Smart Grid, vol. 1, no. 2, pp. 168–177, 2010.

[2] J. Lavaei, S. Member, and S. H. Low, "Zero Duality Gap in Optimal Power Flow Problem," IEEE Trans. Power Syst., vol. 27, no. 1, pp. 92–107, 2012.

[3] L. H. Macedo, S. Member, J. F. Franco, and M. J. Rider, "Considering Energy Storage Devices," pp. 1–12, 2015.

[4] S. Huang, Q. Wu, J. Wang, and H. Zhao, "A Sufficient Condition on Convex Relaxation of AC Optimal Power Flow in Distribution Networks," IEEE Trans. Power Syst., vol. 32, no. 2, pp. 1359–1368, 2017.

[5] R. Madani, S. Sojoudi, and J. Lavaei, "Convex relaxation for optimal power flow problem: Mesh networks," IEEE Trans. Power Syst., vol. 30, no. 1, pp. 199–211, 2015.

[6] S. H. Low, "Convex relaxation of optimal power flow: A tutorial," Proc. IREP Symp. Bulk Power Syst. Dyn. Control - IX Optim. Secur. Control Emerg. Power Grid, IREP 2013, pp. 1–15, 2013.

[7] X. Chang, C. Gao, and S. Gao, "A VAR optimization model in distribution networks with precise linear modelling for OLTC of transformer," 2017 IEEE Conf. Energy Internet Energy Syst. Integr. EI2 2017 - Proc., vol. 2018-Janua, no. 3, pp. 1–4, 2017.

[8] M. A. Akbari et al., "Convex Models for Optimal Utility-Based Distributed Generation Allocation in Radial Distribution Systems," IEEE Syst. J., vol. 12, no. 4, pp. 3497–3508, 2018.

[9] S. H. Low, "Convex Relaxation of Optimal Power Flow - Part II: Exactness," IEEE Trans. Control Netw. Syst., vol. 1, no. 2, pp. 177–189, 2014.

[10] D. K. Molzahn and I. A. Hiskens, "Convex Relaxations of Optimal Power Flow Problems: An Illustrative Example," IEEE Trans. Circuits Syst. I Regul. Pap., vol. 63, no. 5, pp. 650–660, 2016.

[11] W. H. Kerting, "Radial distribution test feeders IEEE distribution planning working group report," IEEE Trans. Power Syst., vol. 6, no. 3, pp. 975–985, 1991.

[12] "GAMS - Download," R.E. Rosenthal, GAMSGeneral Algebr. Model. Syst. GAMS Dev. Washington, DC, USA.

[13] A. Garces, "A quadratic approximation for the optimal power flow in power distribution systems," Electr. Power Syst. Res., vol. 130, pp. 222–229, 2016.