

Simulación y modelamiento matemático de un brazo robótico de 4 grados de libertad

Simulation and mathematical modeling of a 4-degree-of-freedom robotic ARM

Luis Armas¹, Jessica N. Castillo², Luigi O. Freire³

DOI: <https://doi.org/10.61236/ciya.v9i2.1108>

RESUMEN:

El siguiente artículo muestra a detalle el desarrollo del proceso de modelado de un manipulador de un brazo robótico correspondiente a cuatro grados de libertad (4GL) este estudio se basó en cinemática directa para el cálculo y precisión de la posición del efector final basado en sus direcciones articulares. Parte de una posición particular y se observa como es su ubicación en el plano. El uso del método se lo realizó ya que es importante identificar el movimiento del robot. La simulación se la realizó usando el software Matlab, en este programa se pudo ilustrar el movimiento del robot y como llega correctamente al movimiento en la dirección de una trayectoria previamente definida. Adicionalmente, se implementó una prueba que ayudó a comprobar que el robot fue capaz de posicionarse en el punto final deseado y que los errores generados sean mínimos. Los resultados mostraron que el sistema de control llegó a un comportamiento firme, y que el error de seguimiento se reducía llegando a converger en cero, demostrando un movimiento eficiente y preciso esto ocurrió en un tiempo aproximado de 8 segundos, lo cual evidencia una adecuada estabilidad y un diseño eficaz del sistema de control. También se evaluó la estabilidad del movimiento aplicando el criterio de Lyapunov, que proporciona una confirmación teórica de la fiabilidad del sistema de control utilizado. En resumen, los resultados muestran que el brazo robótico es capaz de realizar trayectorias complejas manteniendo un movimiento estable y preciso.

Palabras clave: Derivadas parciales, brazo robótico, 4 grados de libertad, automatización, cinemática.

ABSTRACT:

The following article shows in detail the development of the modeling process of a manipulator of a robotic arm corresponding to four degrees of freedom (4GL) this study was

1

It starts from a particular position and its location in the plane is observed. The use of the method was done because it is important to identify the movement of the robot. The simulation was performed using Matlab software, in this program it was possible to illustrate the movement of the robot and how it correctly reaches the movement in the direction of a previously defined trajectory. Additionally, a test was implemented that helped to verify that the robot was able to position itself at the desired end point and that the errors generated were minimal. The results showed that the control system reached a steady behavior, and that the tracking error was reduced to converge to zero, demonstrating an efficient and precise movement, which occurred in a time of approximately 8 seconds, which evidences an adequate stability and an effective design of the control system. The stability of the movement was also evaluated by applying the Lyapunov criterion, which provides a theoretical confirmation of the reliability of the control system used. In summary, the results show that the robotic arm is capable of performing complex trajectories while maintaining a stable motion.

Keywords: *Partial derivatives, robotic arm, 4 degrees of freedom, automation, kinematics.*

Recibido: 18 de febrero de 2025; **revisión aceptada:** 22 de mayo de 2025

1. INTRODUCCIÓN

En el contexto actual de la automatización industrial, la robótica ha evolucionado hasta convertirse en una disciplina clave para el desarrollo de soluciones inteligentes en procesos repetitivos y de alta precisión. Los brazos robóticos constituyen herramientas fundamentales para la ejecución de tareas de manipulación con alta precisión y repetitividad. Los cuatro grados de libertad (4 GDL) constituyen un nivel intermedio entre los dispositivos mecánicos simples y las estructuras robóticas avanzadas, lo que los convierte en herramientas adecuadas para entornos industriales y fines educativos. Son capaces de realizar movimientos conjuntos

¹ Universidad Técnica de Cotopaxi, Latacunga, Cotopaxi, Ecuador, luis.armas7@utc.edu.ec

² Universidad Técnica de Cotopaxi, Latacunga, Cotopaxi, Ecuador, jessica.castillo@utc.edu.ec

³ Universidad Técnica de Cotopaxi, Latacunga, Cotopaxi, Ecuador, Luigi.freire@utc.edu.ec

de forma controlada, por lo que resultan especialmente adecuados para tareas como el posicionamiento, el montaje y el soporte técnico [1],[2].

El proceso de modelado robótico consiste en la caracterización del movimiento de las articulaciones de este, en ecuaciones ordinarias, diferenciales o integrales según sea la naturaleza del movimiento. Este proceso puede ser más o menos complejo dependiendo directamente del número de articulaciones y del tipo de análisis que se quiere lograr, sea cinemático o dinámico. Cuando el modelado que se quiere lograr es dinámico y el número de articulaciones es mayor o igual a tres, adquiere un nivel de dificultad que hace necesario entonces el uso del software [3] [4],[5],[6].

El uso del software de simulación como MATLAB ha cambiado el desarrollo y la validación de sistemas robóticos. Sus capacidades de cálculo simbólico, simulación dinámica y representación gráfica permiten explorar el comportamiento de un robot en diversos escenarios de funcionamiento antes de construirlo físicamente. El uso de herramientas adicionales, como Simulink o las cajas de herramientas de robótica, mejora enormemente la precisión y visualización de los modelos virtuales [7],[8].

Numerosos estudios han demostrado la eficacia de modelizar y simular brazos robóticos con cuatro grados de libertad (4 GDL). Un ejemplo típico es el desarrollado en la École Polytechnique Nationale, donde se diseñó y probó un modelo en MATLAB Simulink, incluyendo tanto la visualización en 3D como las ecuaciones de transformación derivadas del análisis cinemático directo. Las pruebas validaron trayectorias y movimientos predeterminados con una tolerancia inferior al 2%, lo que demuestra la gran precisión del entorno de simulación utilizado [9].

La investigación de la Universidad Pontificia de Perú se centró en formular la dinámica de un brazo articulado de cizalla sobre una superficie horizontal. La iniciativa combinaba la modelización geométrica con métodos basados en la energía y utilizaba MATLAB para calcular los momentos necesarios en cada articulación y validar el sistema en distintas condiciones de carga [10].

El objetivo de este trabajo es diseñar y simular un brazo robótico de cuatro grados de libertad mediante análisis cinemático en el entorno MATLAB basado en investigaciones previas. El objetivo principal es observar su comportamiento operativo desde el punto de vista geométrico y funcional [11], comprobación y validación para asegurar un control preciso y eficiente del actuador final en una configuración de articulaciones predefinida [12].

Objetivo

Diseñar un brazo robótico de cuatro grados de libertad mediante la simulación para el análisis cinemático directo en el entorno MATLAB, con el fin de validar su comportamiento operativo y garantizar un control preciso del efector final ante distintas configuraciones articulares.

2. METODOLOGÍA

Para diseñar y controlar un brazo robótico de 4 grados de libertad, se utilizan dos conceptos fundamentales: las ecuaciones de posición y la matriz Jacobiana. Estas herramientas permiten comprender el movimiento del brazo robótico en el espacio tridimensional y controlar su precisión y eficiencia.

2.1. Ecuaciones de Posición

Las ecuaciones de posición definen cómo se determina la ubicación del efector final del brazo robótico en los ejes x , y y z , en función de los ángulos de las articulaciones ($\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$) y las longitudes de los eslabones (l_1, l_2, l_3, l_4).

2.1.1. Posición en los Ejes x , y y z :

Cada articulación contribuye al movimiento del brazo en un sistema de coordenadas tridimensional. Las ecuaciones para los ejes x , y y z son las siguientes:

La ecuación 1 define el eje x .

$$hx = l_1 * \cos(\theta_1) + l_2 * \cos(\theta_1 + \theta_2) + l_3 * \dots \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) + l_4 * \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4) \quad (1)$$

La ecuación 2 define el eje y .

$$hy = l_1 * \sin(\theta_1) + l_2 * \sin(\theta_1 + \theta_2) + l_3 * \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) + l_4 * \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4) \quad (2)$$

La ecuación 3 define el eje z .

El sistema es planar (sin movimientos verticales), entonces el eje z puede ser cero. Sin embargo, el sistema es tridimensional y tiene movimiento en z , se incluyeron las ecuaciones adicionales que describen cómo z depende de las articulaciones.

$$h_z = l_1 * \cos(\theta_1) + l_2 * \cos(\theta_1 + \theta_2) + l_3 * \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) + l_4 * \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4)$$

(3)

Estas ecuaciones definen cómo las posiciones $h_x, h_y + h_z$ del efector final están en función de los ángulos $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$ y las longitudes l_1, l_2, l_3, l_4 .

2.2. Matriz Jacobiana:

La matriz Jacobiana se usó para obtener las derivadas parciales de las posiciones con respecto a cada una de las articulaciones. Esto dio una matriz que describe cómo las pequeñas variaciones en los ángulos de las articulaciones afectan las coordenadas del efector final en el espacio x, y, z . Se calculó como se muestra en la matriz 4.

La matriz Jacobiana J es una matriz 3×4 que relaciona la velocidad de las articulaciones con la velocidad del efector final:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_x}{\partial \theta_1} & \frac{\partial h_x}{\partial \theta_2} & \frac{\partial h_x}{\partial \theta_3} & \frac{\partial h_x}{\partial \theta_4} \\ \frac{\partial h_y}{\partial \theta_1} & \frac{\partial h_y}{\partial \theta_2} & \frac{\partial h_y}{\partial \theta_3} & \frac{\partial h_y}{\partial \theta_4} \\ \frac{\partial h_z}{\partial \theta_1} & \frac{\partial h_z}{\partial \theta_2} & \frac{\partial h_z}{\partial \theta_3} & \frac{\partial h_z}{\partial \theta_4} \end{bmatrix} \quad (4)$$

Cada componente de esta matriz es una derivada parcial de la posición del efector final con respecto a un ángulo de articulación.

2.2.1. Cálculo de las Derivadas Parciales:

Para el eje x:

$$\frac{\partial h_x}{\partial \theta_1} = -l_1 * \sin(\theta_1) - l_2 * \sin(\theta_1 + \theta_2) - l_3 * \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) - l_4 * \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4)$$

Para el eje y:

$$\frac{\partial h_y}{\partial \theta_1} = l_1 * \cos(\theta_1) + l_2 * \cos(\theta_1 + \theta_2) + l_3 * \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) + l_4 * \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4)$$

Para el eje z:

$$\frac{\partial h_z}{\partial \theta_1} = -l_1 * \sin(\theta_1) - l_2 * \sin(\theta_1 + \theta_2) - l_3 * \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) - l_4 * \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4)$$

Estas derivadas permitieron calcular cómo las variaciones en los ángulos de las articulaciones $(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4)$ afectan las coordenadas del efector final.

2.3. Ecuación de velocidad

La relación entre las velocidades articulares $(\dot{\theta})$ y las velocidades del efector final $(\dot{h}_x, \dot{h}_y, \dot{h}_z)$ se describe mediante la matriz Jacobiana, para la velocidad se observa la matriz vectorial (5):

$$\begin{bmatrix} \dot{h}_x \\ \dot{h}_y \\ \dot{h}_z \end{bmatrix} = J \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \\ \dot{\theta}_4 \end{bmatrix} \quad (5)$$

Este conjunto de ecuaciones modela el movimiento y la cinemática del sistema articulado y describió las variaciones, utilizando la matriz Jacobiana para vincularlas.

2.4. Diagrama (movimiento en 3D)

En la figura 1 se pueden identificar dos secciones principales:

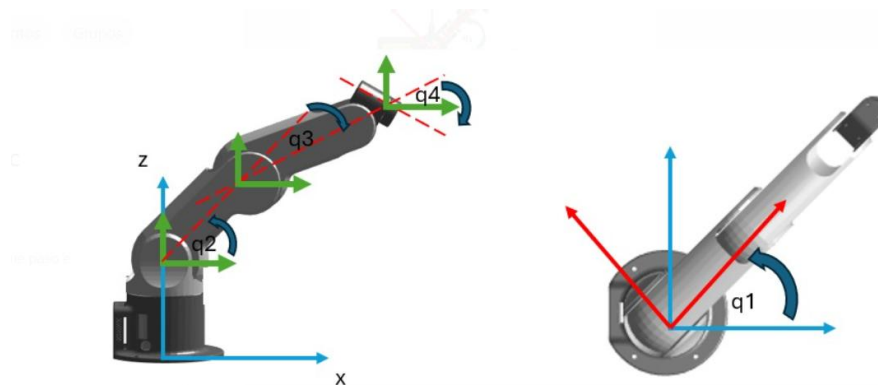


Figura 1. Esquema del brazo robótico de 4GL.

Diagrama superior (movimiento en 3D): Muestra el brazo robótico con las tres articulaciones. Cada articulación está representada por un eje de rotación con un ángulo específico. Los ángulos q_2, q_3, q_4 son los ángulos de las articulaciones, que controlan el movimiento de cada segmento del brazo robótico 4GL.

Diagrama inferior (movimiento en 2D): Muestra la representación de la articulación q_1 que controla la base del robot. El movimiento de la base está representado por este ángulo que

genera el desplazamiento del brazo en la dirección del eje x y y, la fuerza y el movimiento del robot se visualizan mediante los vectores, donde las flechas rojas indican la dirección del movimiento.

2.5. Estabilidad

Para la componente de estabilidad se utilizó cinemática directa para simular el movimiento de un brazo robótico de 4 grados de libertad, permitiendo saber dónde está y cómo se mueve la punta a partir de los movimientos de sus articulaciones. Esto es clave porque ayuda a entender el comportamiento del robot en el espacio y a verificar si está siguiendo bien una trayectoria. A continuación, se muestra el proceso de estabilidad. En la ecuación 6 se muestra cómo se relacionó la velocidad de las variables de tarea $\dot{\mathbf{h}}$ con la velocidad articular $\dot{\mathbf{q}}$ usando la matriz jacobina $\mathbf{J}$.

$$\dot{\mathbf{h}} = \mathbf{J}\dot{\mathbf{q}} \quad (6)$$

La ecuación 7 calcula la velocidad articular de referencia, corrigiendo el error de tarea $\mathbf{h}_e$ y considerando movimientos en el espacio nulo ($\dot{\mathbf{q}}_0$)

$$\dot{\mathbf{q}}_{ref} = \mathbf{J}^\#(\dot{\mathbf{h}}_d + \mathbf{K}\mathbf{h}_e) + (\mathbf{I}_n - \mathbf{J}^\#)\dot{\mathbf{q}}_0 \quad (7)$$

Se puede observar la ecuación 8 que se agrega una tarea secundaria que genera un error que tiende a cero.

$$\dot{\mathbf{h}} = \mathbf{J}(\mathbf{J}^\#(\dot{\mathbf{h}}_d + \mathbf{K}\mathbf{h}_e) + (\mathbf{I}_n - \mathbf{J}^\#)\dot{\mathbf{q}}_0) \quad (8)$$

2.6. Pruebas

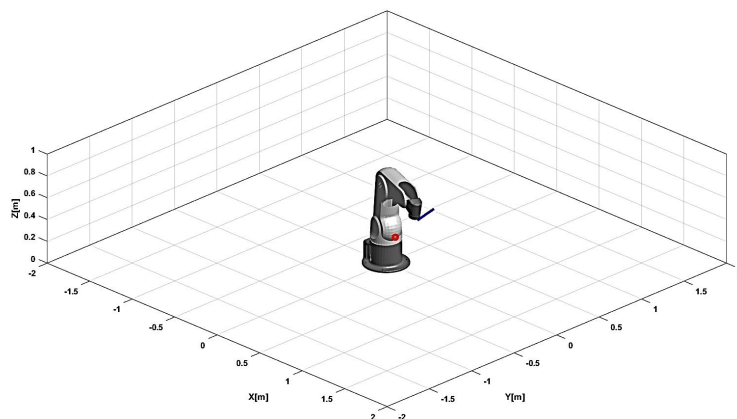


Figura 2. Brazo robótico en 3D, prueba principal-desplazamiento.

Como se puede observar en la figura 2 El brazo robótico se encuentra en medio de una trayectoria planificada. El efector final ha cambiado su orientación estando ahora más

extendido hacia un lado eje negativo y y levemente elevado. El vector azul que parte del efector final representa el eje z local del sistema coordenado del efector, lo que ayuda a visualizar su orientación actual.

La postura del brazo muestra un equilibrio entre los grados de libertad activos, lo cual muestra una buena distribución del esfuerzo mecánico y una planificación de trayectoria optimizada.

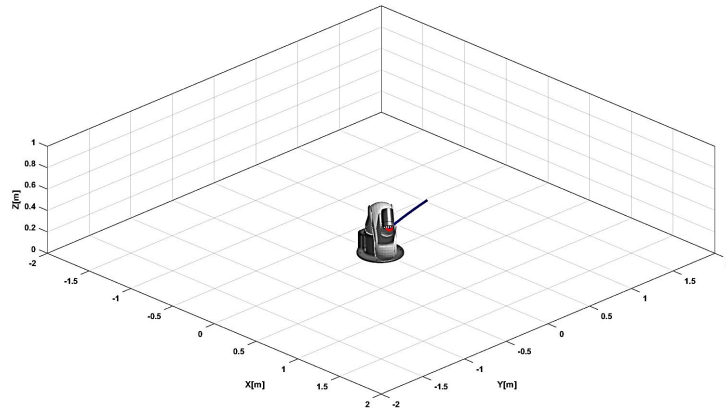


Figura 3. Brazo robótico en 3D-tarea secundaria-posición.

La figura 3 muestra el brazo del robot en una configuración inicial optimizada para iniciar la operación. Su posición central, cerca de la base y con el efector extendido hacia delante, indica que el robot está preparado para realizar el movimiento previsto con precisión. Se eligió esta configuración para las pruebas de simulación porque proporciona unas condiciones iniciales simétricas que son fáciles de manejar tanto cinemática como dinámicamente.

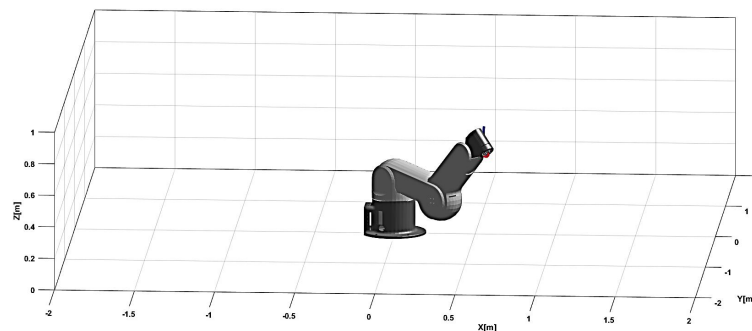


Figura 4. Brazo robótico en 3D-tarea secundaria.

La figura 4 presenta la simulación tridimensional del brazo robótico articulado. En esta simulación se analizaron los desplazamientos de los distintos eslabones y articulaciones del sistema, lo que resulta valioso para examinar su cinemática y planificar las trayectorias con anticipación a su aplicación en un entorno físico.

3. RESULTADOS

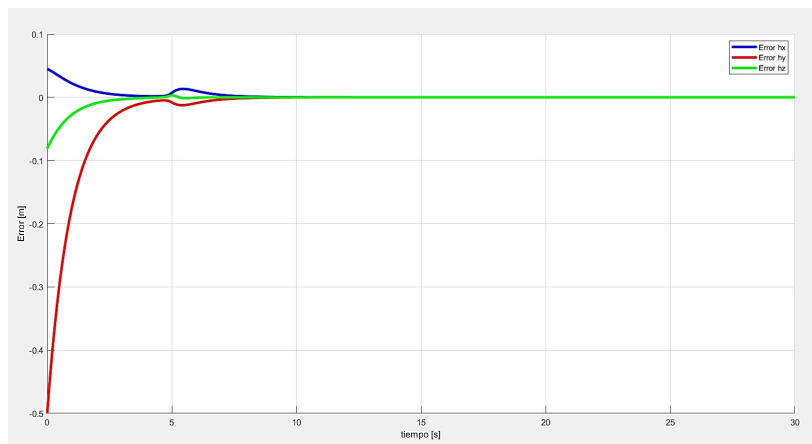


Figura 5. Brazo robótico-Error de posición.

La figura 5 muestra el error de posición de la prueba 1 en los tres ejes espaciales: x, y y z. Puede observarse que todos los errores (h_x , h_y , h_z) disminuyen gradualmente hasta aproximarse a cero con el tiempo, lo que demuestra la capacidad del sistema para corregir su posición y alcanzar el punto objetivo. La convergencia se alcanzó aproximadamente en los primeros 9 segundos, lo que demuestra la ágil respuesta del sistema.

Comportamiento inicial

- El error registrado en el eje y (h_y) muestra una desviación inicial significativa que se aproxima a ($\sim -0,48$) metros, lo que indica que el efector en esta dirección partió de una posición alejada del punto objetivo.
- El error en el eje x (h_x) es también significativo al inicio (~ -0.04 m), pero menor comparado con el eje y.
- El error en el eje z (h_z) es mínimo desde el inicio (~ -0.08 m), lo que sugiere una buena estimación o control inicial en ese eje.

Respuesta transitoria

- Se observan pequeñas oscilaciones (sobre impulsos) alrededor del segundo 5 en los errores de x e y, típicos de una respuesta dinámica a una corrección o ajuste fino del controlador.
- El sistema se estabiliza de manera suave y sin oscilaciones adicionales, lo cual es un indicativo de un controlador bien sintonizado.

3.1. Análisis de errores articulares por la tarea secundaria

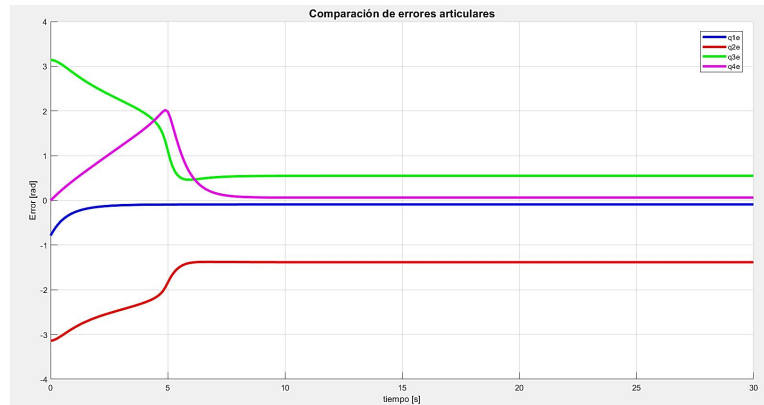


Figura 6. Brazo robótico-Errores Articulares

En la figura 6 se observa la comparación de los errores articulares $q1e$, $q2e$, $q3e$ y $q4e$ a lo largo del tiempo, representados por líneas de colores diferentes. A continuación, se presenta el análisis tanto del comportamiento inicial como de la respuesta transitoria de los errores articulares:

Comportamiento Inicial. -

- Al principio de la simulación (en el tiempo 0 s), los errores de las articulaciones $q1e$, $q2e$, $q3e$ y $q4e$ están lejos de sus valores de equilibrio finales, lo que significa que las articulaciones del brazo del robot parten de posiciones fuera del objetivo.
- Los errores iniciales son de magnitud considerable, lo que indica una diferencia significativa entre las posiciones reales de las articulaciones y las posiciones objetivo especificadas.

Respuesta Transitoria:

- Para $q1e$ (representado por la línea azul): El error presenta un aumento inicial en los primeros segundos, alcanzando un valor máximo positivo, lo que indica que el sistema está intentando corregir una subposición. Después de este pico, el error disminuye progresivamente hasta estabilizarse en un valor cercano a cero.
- Para $q2e$ (representado por la línea rojo): Similar al comportamiento de $q1e$, el error comienza a aumentar antes de estabilizarse en un valor cercano a cero.

- Para q_{3e} (representado por la línea verde): Este error muestra un comportamiento algo similar al de q_{1e} , con un pico inicial, seguido por una reducción rápida hasta llegar a un valor estable.
- Para q_{4e} (representado por la línea magenta): El error se mueve de manera similar a los otros errores articulares, pero su comportamiento es más lineal, manteniendo una tendencia a estabilizarse en un valor negativo.

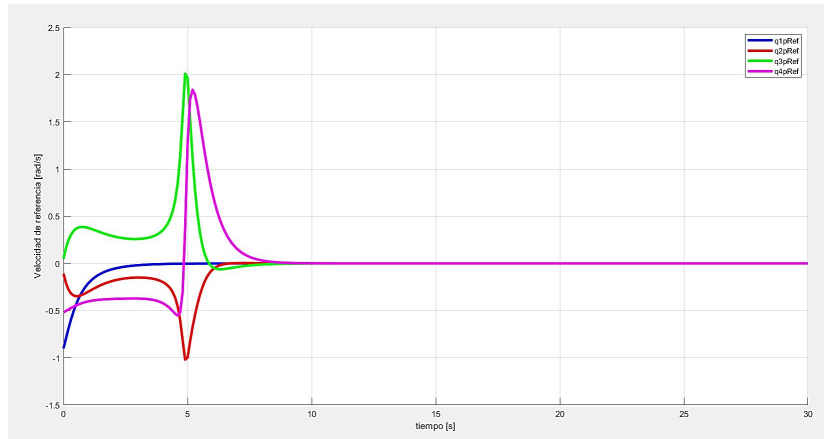


Figura 7. Brazo robótico-Errores Articulares

La figura 7 muestra las velocidades de referencia q_{1pRef} , q_{2pRef} , q_{3pRef} , q_{4pRef} de las articulaciones de un brazo robótico en función del tiempo. A continuación, se analiza el comportamiento inicial y la respuesta transitoria:

Comportamiento Inicial

- Al inicio de la simulación (tiempo 0 s), las velocidades de referencia comienzan desde valores negativos. Este comportamiento inicial sugiere que el sistema está en una etapa de ajuste donde las velocidades de las articulaciones aún no han alcanzado sus valores de referencia.
- Las velocidades comienzan a cambiar de manera considerable en los primeros segundos, lo que indica que el sistema está comenzando a responder a la entrada de velocidad.

Respuesta Transitoria

- Para q_{1pRef} (línea azul): la velocidad de referencia comienza con valores negativos y aumenta rápidamente cuando alcanza un pico positivo. A continuación, la velocidad oscila hasta aproximarse a cero. Estas oscilaciones son una característica común de los sistemas de control y reflejan la sobremarcha y la adaptación a la consigna.

- q2pRef (línea roja): al igual que q1pRef, la tasa de referencia q2 comienza con un valor negativo, luego sube bruscamente, después baja y finalmente se estabiliza. El pico inicial es más pronunciado, lo que indica que la articulación q2 tiene una respuesta dinámica más pronunciada en comparación con las demás articulaciones.
- Para q3pRef (línea verde): la respuesta de q3pRef es similar a la de q1pRef, aunque muestra una caída más pronunciada de la tasa de referencia antes de alcanzar el equilibrio. El valor final tiende a cero, lo que significa que, tras el ajuste inicial, el compuesto alcanza el equilibrio sin oscilaciones relativas.
- Para q4pRef (línea magenta): Muestra una oscilación inicial más pronunciada, alcanza un pico positivo y luego se estabiliza en un valor positivo constante. La tasa de referencia para q4 muestra una rápida estabilización en comparación con los demás compuestos.

4. Conclusiones

El sistema de control simulado para el brazo robótico demuestra un rendimiento estable y eficaz, alcanzando el objetivo espacial con una buena precisión en los tres ejes. La respuesta transitoria es aceptable y la ausencia de oscilaciones sostenidas o error permanente indica una dinámica robusta y adecuada para tareas de manipulación en entornos controlados.

La simulación del brazo robótico demuestra un comportamiento estable y controlado, en el cual la prueba principal, que es el desplazamiento hacia una trayectoria deseada en el espacio de tareas, se cumple de forma precisa mediante el uso de una ley de control basada en el Jacobiano y corrección del error. Adicionalmente, se verifica la prueba secundaria, que consiste en que el sistema puede acomodarse en la misma posición final deseada, sin errores residuales, lo que valida la eficacia del controlador propuesto y la convergencia del error gracias al análisis de estabilidad mediante Lyapunov.

Los errores en los tres ejes convergen hacia cero en un tiempo aproximado de 8 segundos, lo cual evidencia una adecuada estabilidad y un diseño eficaz del sistema de control.

5 Bibliografía

[1] Pazmiño, L., Echeverría, D., & Cepeda, J. (2018). Análisis de transitorios electromagnéticos en el Sistema Nacional Interconectado (S.N.I.) a nivel de 230 kV y 500 kV usando el simulador digital en tiempo real HYPERSim. *Revista Técnica Energía*, 15(1). <https://doi.org/10.37116/revistaenergia.v15.n1.2018.319>

- [2] J. Medina Cervantes, R. Villafuerte Díaz, and E. Mejía Sánchez, "3D simulator for a 4-degree-of-freedom robotic arm," *Revista Iberoamericana para la Investigación y el Desarrollo Educativo*, no. 12, pp. 1-14, 2014.
- [3] Plasencia, A., Freire, L. O., Quinatoa, C., & Castillo, J. (2024). Optimization of Power System Operation Using Battery Energy Storage Systems. En *Lecture notes in networks and systems* (pp. 496-510). https://doi.org/10.1007/978-3-031-68653-5_47
- [4] A. Monje and S. Dormido, *Industrial Automation and Robotics*, Madrid, Spain: UNED, 2011.
- [5] A. Monje and S. Dormido, *Automática y Robótica Industrial*, Madrid, Spain: UNED, 2011.
- [6] Mercado, L. D. M., Bolívar, L. M., & Mckinley, J. R. (2017). Cinemática de velocidad y aceleración del robot serial Mitsubishi Movemaster RV-M1. *Entre Ciencia E Ingeniería*, 11(22), 84-94. <https://doi.org/10.31908/19098367.3552>
- [7] J. N. Castillo, G. G. Carrillo, L. O. Freire, and J. Culqui, "Fusion data management and modeling techniques in power quality compensation using SAPF," *Fusion: Practice and Applications*, vol. 16, no. 2, pp. 8-21, 2024.
- [8] Felipe, L. A. L. (2011, 9 mayo). Modelación y simulación dinámica de un brazo robótico de 4 grados de libertad para tareas sobre un plano horizontal. <https://repositorio.pucp.edu.pe/items/2b0ffdbc-a70e-4b54-8ed9-796a0f3739a8>
- [9] Humberto, G. T. A. (2021, 27 julio). Simulación en el entorno Simulink de Matlab de un brazo robótico de 4 grados de libertad (GDL). <https://bibdigital.epn.edu.ec/handle/15000/21750>
- [10] AcostaR., ArgüelloD., RobalinoR., y MarreroS., «Caracterización de los motores paso a paso y su aplicación», *CIYA*, vol. 5, n.º 2, pp. 99-113, ago. 2021.
- [11] Husnain, S., & Abdulkader, R. (2023). Fractional Order Modeling and Control of an Articulated Robotic Arm. *Engineering Technology & Applied Science Research*, 13(6), 12026-12032. <https://doi.org/10.48084/etasr.6270>
- [12] Iqbal, J. (2019). Modern Control Laws for an Articulated Robotic Arm: Modeling and Simulation. *Engineering Technology & Applied Science Research*, 9(2), 4057-4061. <https://doi.org/10.48084/etasr.2598>